

## РЫСҚАН АЙНҰР РЫСҚАНҚЫЗЫ

### КӨП ӨЛШЕМДІ ГИПЕРГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ЕКІНШІ РЕТТІ АЗҒЫНДАЛҒАН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУГЕ ҚОЛДАНУ

6D060100 – «Математика» мамандығы бойынша философия докторы  
(PhD) дәрежесін алу үшін дайындалған диссертациялық жұмысына

#### АҢДАТПА

**Зерттеу тақырыбының өзектілігі.** Гипергеометриялық функциялар арнайы функциялар класында ерекше орын алады. Көбінесе математика, физика, механика, экономиканың әртүрлі есептерінің шешімдері арнайы функциялары бар белгілі бір интегралдар арқылы өрнектеледі. Бірақ бұл интегралдарды белгілі алгоритмдердің көмегімен шешу әрдайым мүмкін емес, өйткені интегралдық функциялар көбінесе бір немесе бірнеше параметрлерден тәуелді болады. Бұл көптеген күрделі интегралдарды есептеуге әкеледі. Мұндай жағдайларда қазіргі заманғы компьютерлік технологиялар мен сандық әдістердің мүмкіндіктері жеткіліксіз болып келеді. Осындай жағдайда интегралды жинақталатын шексіз қатар немесе көбейтінді арқылы жазған орынды болады.

Гипергеометриялық функциялардың қасиеттерін зерттеудің маңызы зор, өйткені гипергеометриялық функциялар дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілуін зерттеуде кеңінен қолданылады. Бұл диссертациялық зерттеуде эллипстік типтегі екінші ретті дербес туындылы төрт өлшемді азғындалған дифференциалдық теңдеуді қарастырылады, ол үшін іргелі шешімдер құрылады, төрт өлшемді гипергеометриялық функциялармен өрнектелетін шекаралық есептердің шешімдері табылады. Түрлендірулер мен оператор әдісін қолдана отырып, төрт аргументті гипергеометриялық қатарлары аз айнымалылар мен параметрлерге байланысты бірнеше гипергеометриялық қатарлардың көбейтіндісі ретінде көрсетіледі. Шектелген аймақта азғындалған эллипстік теңдеулер үшін шеттік есептерді шешу барысында іргелі шешімдерімен өрнектелетін Грин функциялары тұрғызылу қажет. Осылайша, төрт айнымалысы бар гипергеометриялық функцияларының қасиеттерін зерттеу және оларды азғындалған эллипстік теңдеулер үшін шеттік есептердің шешілуін зерттеуде қолдану диссертацияның осы тақырыбының **өзектілігін** анықтайды.

Ұсынылған диссертацияда қарастырылған мәселелерді зерттеу дәрежесіне жүргізілген шолу мен талдау соңғы ғасырда гипергеометриялық функциялар теориясының дамуы өте ілгерілгенін көрсетті. Гипергеометриялық функциялар көптеген саладағы есептердің дифференциалдық теңдеулерін шешуде қолданылады, мысалы, олар

математикалық физикада, жылу өткізгіштік есептерінде және аспан механикасының кейбір бөлімдерінде, потенциалдар құрылысында, математикалық статистика элементтерінде, электромагниттік тербелістерді зерттеуде және аэродинамикада, байланыс және суперстринг теорияларында қолданылады, сонымен қатар кванттық химия мен газ динамикасының қолданбалы есептерінде, кванттық өріс теориясы мен астрономияның қосымшаларында кездеседі. Бірнеше айнымалы гипергеометриялық функцияларының қасиеттері зерттелді, бірқатар функциялар үшін интегралдық көріністер формулалары, жіктеу формулалары, байланысты қатынастар және аналитикалық жалғау алынды.

**Диссертациялық жұмыстың мақсаты** төрт айнымалы Геллерстедт теңдеуінің іргелі шешімдерін құру және шеттік есептердің дұрыс шешілуін зерттеу.

**Зерттеу нысаны** – төрт айнымалы гипергеометриялық функциялар және эллипстік типті Геллерстедт теңдеуі.

**Зерттеу пәні** –  $(H)$  эллипстік типті азғындалған теңдеу үшін шеттік есептерді шешуде төрт айнымалысы бар гипергеометриялық функциялардың қолданылуы.

**Зерттеудің міндеттері:**

- төрт айнымалы гипергеометриялық функциялары үшін дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің сызықтық тәуелсіз шешімдерін алу;

- төрт айнымалы гипергеометриялық функциялардың жіктеу формулаларын алу;

-  $R_+^4$ -де азғындалған эллипстік теңдеудің іргелі шешімдерін құру;

- шексіз аймақтағы  $(H)$  азғындалған теңдеуі үшін шеттік есептердің шешілу мәселелерін қою және шешу сұрақтарын зерттеу;

- шексіз аймақта Дирихле мен Нейманның аралас шарттары бар  $(H)$  теңдеуіне арналған есептерді қою және шешу сұрақтарын зерттеу;

- шектеулі аймақта  $(H)$  азғындалған теңдеу үшін  $N$  шеттік есебін шешу.

**Қорғауға шығарылған негізгі тұжырымдар:**

1) Кейбір төрт айнымалы гипергеометриялық функциялары үшін дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің сызықтық тәуелсіз шешімдері құрылды.

2) Берчнелл-Ченди  $\nabla_{x,y}(c)$  және  $\Delta_{x,y}(c)$ , Хасанов-Сривастава  $\tilde{\nabla}_{x;y,z,t}(c)$  және  $\tilde{\Delta}_{x;y,z,t}(c)$ , Чой-Хасанов  $N(a,b)$  және  $\bar{N}(a,b)$  өзара кері операторлар жұптары көмегімен кейбір төрт айнымалы Гаусстың гипергеометриялық қатарлары үшін операторлық тепе-теңдік пен жіктеу формулалары дәлелденді.

3) Төрт өлшемді азғындалған эллипстік теңдеудің он алты іргелі шешімі айқын түрде құрылды.

4) Шексіз аймақта төрт өлшемді жалпыланған Геллерстедт теңдеуі үшін шеттік есептерді құру әдісі жасалды. Шеттік есептердің шешімі бар болуы және жалғыздық теоремалары дәлелденді.

5) Шектелген аймақта  $N$  есебінің шешімі бар болуы дәлелденді.  $N$  есебінің Грин функциясы құрылды. Есептің айқын түрде шешімі алынды.

**Зерттеу әдістері.** Диссертациялық зерттеудің мақсаттары мен міндеттерін іске асыру барысында көп айнымалы гипергеометриялық қатарларының сапалық қасиеттері, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің классикалық әдістері, интегралдық есептеу әдістері, операциялық әдістер, энергия интегралдарының әдісі және экстремум принципі, Грин функциясының әдісі, Меллин-Бернстін түрлендіру әдісі, Берчнелл-Ченди мен Чой-Хасановтың операторлық әдістері қолданылды.

#### **Зерттеудің ғылыми жаңалығы.**

1. Төрт өлшемді гипергеометриялық функциялар үшін дифференциалдық гипергеометриялық теңдеулер жүйесі шешіліп, сәйкес жүйелердің сызықтық тәуелсіз шешімдері айқын түрде табылды.

2. Әр түрлі операторлардың көмегімен төрт айнымалысы бар кейбір гипергеометриялық функциялар үшін жіктеу формулалары алынды.

3. Алғаш рет төрт айнымалысы бар Геллерстедт эллипстік теңдеуінің іргелі шешімдері құрылды, олардың көмегімен шексіз аймақта бірқатар шеттік есептер шешілді. Шектелген аймақта  $N$  есебі тұжырымдалды, бұл есептің шешімі бар болуы дәлелденді,  $N$  есебінің Грин функциясы құрылды және есептің айқын түрде шешімінің бар екендігі дәлелденді.

**Диссертацияда тұжырымдалған ғылыми қағидалардың дәлелдігі мен шынайлығы** халықаралық ғылымиметрикалық базаларға кіретін басылымдарда негізгі нәтижелердің жариялануымен расталады; сондай-ақ дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясында қолданылатын белгілі классикалық әдістердің қолданылуымен, алынған әрбір нәтиженің дәйекті негіздемесімен және дәлелдемесімен расталады; бірнеше айнымалы гипергеометриялық функцияларымен жұмыс істеу үшін гипергеометриялық функциялар теориясының негізгі еңбектерінде тексерілген және жарияланған дәлелденген алгоритмдер мен әдістер қолданылды.

#### **Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңыздылығы.**

Диссертациялық зерттеу тақырыбы негізінен теориялық бағыты бар. Гипергеометриялық функциялардың қасиеттерін зерттеумен байланысты нәтижелер арнайы функциялар теориясының білім қорын толықтырады. Алынған нәтижелерді шекті есептер теориясында азғындалған эллипстік типтегі теңдеулер үшін қолдануға болады.

**Диссертациялық жұмыстың өзгеде ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.** Ұсынылған диссертация келесі жобалар аясында орындалды:

1) ҚР БҒМ 2018-2020 жылдарға арналған іргелі және қолданбалы ғылыми зерттеулерді гранттық қаржыландыру бағдарламасының №АР05131026 "Үйкеліс коэффициентінің (жадымен) жиілікке тәуелділігін ескере отырып, кеуекті ортаның серпінің математикалық модельдеу" жобасы;

2) Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің 2020 жылға арналған гранттық қаржыландыру: "Эллипстік типтегі төрт өлшемді азғындалған теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімдерін құру әдістерін әзірлеу". Шарт №3 05.01.2020ж.

**Жұмыс апробациясы.** Диссертация тақырыбы бойынша зерттеулер жүргізу барысында алынған аралық нәтижелер талқыланып, семинарлар мен конференцияларда баяндалды. Осылайша, 14 ғылыми конференцияның материалдар жинағында тезистер мен мақалалар жарияланды, олардың 11-і халықаралық мәртебеге ие болды: «Дифференциалдық теңдеулер және байланысты мәселелер» Халықаралық ғылыми конференциясы (2018, Стерлитамак, БР); «Күрделі жүйелерді оңтайландыру мәселелері» Он төртінші халықаралық Азия мектеп-семинары (2018, Ыстықкөл, ҚР); The VI International scientific conference «Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018» (2018, Tashkent, RU); III «Информатика және қолданбалы математика» Халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (2018, Алматы, ҚР); «Білім мен ғылымдағы математикалық модельдеу және ақпараттық технологиялар» VIII Халықаралық ғылыми-әдістемелік конференциясы (2018, Алматы, ҚР); V «Локальды емес шеттік есептер және математикалық биология, информатика және физикаға қатысты мәселелер» Халықаралық ғылыми конференциясы (2018, Нальчик, КБР); «Шеттік есептер теориясының заманауи әдістері» XXX – Халықаралық конференция. Воронеж көктемгі математикалық мектеп Понтрягин оқулары (2019, Воронеж, РФ); «Қолданбалы математика және информатика мәселелері» ғылыми семинары (2019, Ақтобе, ҚР); International scientific conference «Inverse problems in finance, economics and life sciences» (2019, Алматы, ҚР); «Информатика және қолданбалы математика» IV Халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (2019, Алматы, ҚР); «Математикалық физиканың классикалық емес теңдеулері және олардың қосымшалары» Өзбек-Ресей ғылыми конференциясы (2019, Ташкент, ӨР); «Дифференциалдық теңдеулері мен математиканың сабақтас бөлімдерінің заманауи мәселелері» Халықаралық ғылыми конференциясы (2020, Фергана, ӨР); «Шеттік есептер теориясының заманауи әдістері» XXXI – Халықаралық конференция. Воронеж көктемгі математикалық мектеп Понтрягин оқулары (2020, Воронеж, РФ); «Математикалық физиканың заманауи әдістері және оларды қолдану» Шетелдік ғалымдардың қатысуымен республикалық ғылыми конференциясы (2020, Ташкент, ӨР).

**Жарияланымдар.** Диссертация тақырыбы бойынша шыққан нәтижелері 21 баспалық жұмыста жарияланды, оның ішінде 3 мақала халықаралық ғылыми қорларға жататын рейтингтік халықаралық журналдарда, 3 мақала ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған журналдарда, 1 мақала РФДИ базасына кіретін журналда, 14 тезис пен мақала халықаралық конференциялар нәтижелерінің жинақтарында жарияланды.

Рейтингтік ғылыми журналдардағы жарияланымдар:

1 Hasanov A., Berdyshev A.S., Ryskan A. Fundamental solutions for a class of four-dimensional degenerate elliptic equation // Complex Var. Elliptic Equ. –2020. –Vol. 65, No. 4, –P. 632–647.

2 Berdyshev A.S., Ryskan A. The Neumann and Dirichlet problems for one four-dimensional degenerate elliptic equation // Lobachevskii J. Math. –2020. – Vol. 41, No. 6, –P. 1051–1066.

3 Berdyshev A.S., Hasanov A., Ryskan A.R. Solution of the Neumann problem for one four-dimensional elliptic equation. // Eurasian Math. J. –2020. – Vol.11, No. 2. –P. 93–97.

ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған журналдардағы жарияланымдар:

1 Рыскан А.Р. Формулы разложения с операторами Н Гипергеометрических рядов Гаусса от четырех переменных второго порядка // Вестник КазНПУ им.Абая. Сер. Физ.-мат. науки. –2020. №3(71). –С. 79-84.

2 Berdyshev A.S., Hasanov A., Ryskan A.R. Decomposition formulas for some quadruple hypergeometric series // Bullet. Karaganda Univ. Math. ser. – 2020. No. 4 (100), –P. 43–54.

3 Рыскан А.Р. Решение задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка // Вестник КазНПУ им.Абая. Сер. Физ.-мат. науки. –2019. № 4 (68). –С. 92–98.

**Жұмыс көлемі мен құрылымы.** Диссертациялық жұмыс 107 бетте баяндалған, кіріспеден, бөлімдері бар төрт тараудан, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

**Диссертацияның негізгі мазмұны.** Кіріспеде азғындалған эллипстік теңдеулер мен гипергеометриялық функциялар теорияларының даму кезеңдерінің қысқаша хронологиясы келтірілген, осы зерттеу нысаны мен пәнінің қазіргі жағдайы сипатталған. Ағымдағы уақытқа диссертация тақырыбының өзектілігі мен жаңалығы баяндалған, жұмыстың мақсаты мен міндеттері тұжырымдалған, зерттеу әдістері, ғылыми қағидалардың дәлелдігі мен шынайлығы, диссертацияда тұжырымдалған қорытындылар мен ұсыныстар, теориялық және практикалық маңыздылығы, негізгі нәтижелерді апробациялау және жариялау көрсетілді.

Бірінші тарау төрт бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімде гипергеометриялық функциялар туралы белгілі анықтамалар, қасиеттер, формулалар және бастапқы мәліметтер келтірілген. Екінші бөлімде диссертациялық зерттеудің алғашқы нәтижелері келтірілген: төрт өлшемді гипергеометриялық функциялардың қатары үшін екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің анықтамалары және олардың сызықтық тәуелсіз шешімдері берілген. Үшінші және төртінші бөлімдерде әр түрлі операторларды қолдана отырып, төрт айнымалы гипергеометриялық функциясының жіктеу формулалары мен операторлық тепе-теңдіктер келтірілген, операторлық тепе-теңдіктердің тұралығы Меллин-Бернс түрлендіруімен дәлелденеді, жіктеу формулаларының туралығы операторлық тепе-теңдіктермен көрсетіледі.

Екінші тарау төрт азғындау гипержазықтығы бар екінші ретті дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдерін құруға арналған.

Лауричелланың гипергеометриялық функцияларымен өрнектелген он алты іргелі шешім алынды. Дифференциалдау, автотрансформация формулалары және жіктеу формуласын қолдана отырып іргелі шешімдердің сингулярлық теоремасы да дәлелденді, мұнда жіктеу формуласы бірнеше айнымалыдан тәуелді гипергеометриялық функциясын бір айнымалы Гаусс функциясының көбейтіндісі ретінде келтіреді.

Үшінші тарауда шексіз аймақтағы бірнеше азғындығы бар эллипстік теңдеу үшін шеттік есептер тұжырымдалған, есептердің шешімі бар екендігі мен жалғыздығы туралы теоремалардың дәлелдері келтірілген, олардың шешімдері айқын түрде жазылған. Дирихле шеттік шарттары бар есептердің шешімдерінің жалғыздық теоремасы экстремум принципі арқылы дәлелденеді.  $N^\infty$  шеттік есебінің шешімінің жалғыздығын дәлелдеу үшін энергия интегралдарының әдісі қолданылады.

Төртінші тарау шекті аймақта ( $H$ ) азғындалған теңдеу үшін  $N$  шеттік есепті шешуге арналған.  $N$  шеттік есебінің жалғыздық теоремасының дәлелдігі келтірілген.  $N$  шеттік есебінің Грин функциясы құрастырылған.  $N$  шеттік есебінің шешімі бар болу теоремасы дәлелденді, шешім айқын түрде жазылды.

Қорытындыда диссертациялық зерттеу барысында алынған негізгі нәтижелер келтірілген және олар бойынша тұжырым жасалған.